

Direct limit

关于直系 (direct system) 与直极限 (direct limit) 的定义及其万有性质, 可见 ~~Matsumura~~ Matsumura << Commutative Ring Theory >> 附录 A.

在实际应用中, 经常用到以下性质:

设 $\{M_\lambda, f_{\lambda\mu}\}$ 为一个 ~~是~~ direct system indexed by Λ , 其中 $(\Lambda, \leq)$ 为一个偏序集.

称 Λ 的一个子集 S 是 cofinal 的, 如果 $\forall \lambda \in \Lambda$, $\exists \mu \in S$, s.t. $\lambda \leq \mu$.

易见若 S 为 Λ 的 cofinal 子集, 则 $(S, \leq)$ 也为偏序集. 且以 S 为指标集的系统 $\{M_\lambda, f_{\lambda\mu}\}_{\lambda \in S}$ 也为 direct system. 由直极限的万有性质不难验证有同构:

$$\varinjlim_{\lambda \in S} M_\lambda \simeq \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

例: 设 X 为 variety, $\mathcal{O}_x$ 为 x 的正则函数环. 对 X 中任一点 x , $\Lambda = \{U \mid U \text{ 为 } X \text{ 中包含 } x \text{ 的开集}\}$ 在包含关系下成为偏序集, 即 $\forall U, V \in \Lambda$, 定义 $U \leq V \Leftrightarrow V \subseteq U$. 这样 $\{\mathcal{O}_x(U), \rho_{UV}\}_{U \in \Lambda}$ 成为一个 direct system. 定义 $\mathcal{O}_{x,x} := \varinjlim_{U \in \Lambda} \mathcal{O}_x(U)$, 称为 X 在 x 处的 Stalk. 不难看到 $S = \{D(f)\}$ 若 X 为仿射.

不难看出, 任取 X 的一个仿射开集 $U \ni x$, 令 $A = \mathcal{O}_X(U)$ 为 U 的正则函数环. 则 $S = \{ D(f) \mid f \in A, \cancel{x \in D(f)} \}$
 $f(x) \neq 0$
 为 Λ 的子集. 且 S 为 Λ 的 cofinal 子集.

$$\text{从而 } \mathcal{O}_{X,x} = \lim_{V \in \Lambda} \mathcal{O}_X(V) \simeq \lim_{D(f) \in S} \mathcal{O}_X(D(f))$$

$$\simeq \lim_{D(f) \in S} \mathcal{O}_U(D(f)) = \lim_{D(f) \ni x} A_f = \lim_{\substack{f \in A \\ f(x) \neq 0}} A_f \simeq A_m$$

其中 m 为 A 中对应于 x 的极大理想

例: 设 X 为不可约簇. 则 $\Lambda = \{ U \mid U \text{ 为 } X \text{ 中非空开集} \}$ 在包含关系下成为偏序集.

$$\text{定义 } K(X) := \lim_{U \in \Lambda} \mathcal{O}_X(U)$$

则 $K(X)$ 为域. 事实上, 任取 X 的仿射开集 U .

设 $A = \mathcal{O}_X(U)$ 为 U 的正则函数环, 则 A 为整环

(因为 U 不可约). 且 $S = \{ D(f) \mid f \in A, f \neq 0 \}$ 为 Λ 的一个 cofinal 子集.

$$\text{从而 } K(X) \simeq \lim_{D(f) \in S} \mathcal{O}_X(D(f)) = \lim_{\substack{f \in A \\ f \neq 0}} A_f \simeq K(A)$$

$K(A)$ 为 A 的分式域.

容易验证, 自然同态 $\mathcal{O}_X(V) \rightarrow K(X)$ 为单同态. $\forall V \in \Lambda$,

以及 $\forall x \in X$, 自然同态 $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow K(X)$ 为单同态.

并且通过这些自然嵌入, 将 $\mathcal{O}_X(V)$ 与 $\mathcal{O}_{X,x}$ 均看作 $K(X)$ 的子环.

则有 $\mathcal{O}_X(V) = \bigcap_{x \in V} \mathcal{O}_{X,x}$, 对每个非空开集 V 成立.

练习: 设 $X = A_k^2$, $Y = A_k^2 - \{(0,0)\}$.

由上例结论, 自然的开嵌入 $Y \hookrightarrow X$ 诱导

$$\text{嵌入 } \mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{O}_Y(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X) \hookrightarrow K(X)$$

$$\text{且有 } \mathcal{O}_Y(Y) = \bigcap_{x \in Y} \mathcal{O}_{Y,x} = \bigcap_{x \in Y} \mathcal{O}_{X,x} = \bigcap_{x \neq (0,0)} \mathcal{O}_{X,x}$$

$$\text{试证明 } \cancel{\mathcal{O}_Y(Y)} \bigcap_{x \neq (0,0)} \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_X(X) = k[x_1, x_2]$$

由此证明 Y 不是仿射簇.